Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală
Iaşi, 17 Aprilie 2006
SOLUŢII ŞI BAREMURI

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie A o matrice pătrată de ordin n, cu elemente numere complexe şi A^* matricea sa adjunctă. Demonstraţi că dacă există un număr natural $m \geq 1$ astfel încât $(A^*)^m = 0_n$, atunci $(A^*)^2 = 0_n$.

Soluţie. Din ipoteză avem $\det(A^*)^m = 0$, deci $\det(A^*) = 0$ şi $\det(A) = 0$. .... (**2 puncte**)
În acest caz A^* are rangul cel mult 1. Într-adevăr,
• dacă A are rangul cel mult $n-2$ atunci $A^* = 0_n$,
• dacă A are rangul $n-1$ atunci din $AA^* = 0_n$ şi din inegalitatea lui Sylvester reiese $0 =$ rang $(AA^*) \geq$ rang $(A) +$ rang $(A^*) - n =$ rang $(A^*) - 1$. .... (**3 puncte**)

Să presupunem acum că $m \geq 3$ (în caz contrar nu avem nimic de demonstrat). Deoarece A are rangul cel mult 1 există matricea linie $X \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{C})$ şi matricea coloană $Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C})$ astfel încât $A = YX$. Notând $XY = a \in \mathbb{C}$ obţinem $0_n = A^m = Y(XY)^{m-1}X = a^{m-1}YX = a^{m-1}A$, de unde $a = 0$ sau $A = 0_n$, deci $A^2 = aA = 0_n$... (**2 puncte**)

Subiectul 2. Vom spune că matricea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o *pseudo-inversă* a matricei $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dacă $A = ABA$ şi $B = BAB$.
a) Demonstraţi că orice matrice pătrată are cel puţin o pseudo-inversă.
b) Pentru care matrice este pseudo-inversa unică?

Soluţie. a) Fie r rangul matricei A. Există atunci matricele inversabile P, Q astfel încât matricea PAQ să aibă primele r elemente de pe diagonala principală egale cu 1, iar restul elementelor nule. Într-adevăr, transformările care se fac pentru a evidenţia rangul lui A corespund unor înmulţiri ale lui A cu matrice inversabile:
• permutarea liniilor (coloanelor) i, j revine la înmulţirea la stânga (dreapta) cu matricea (x_{kl}) dată de $x_{ll} = 1$ pentru $l \neq i, j$, $x_{ij} = x_{ji} = 1$ şi restul elementelor nule;
• adunarea liniei (coloanei) i înmulţite cu α la linia (coloana) j se realizează prin înmulţirea la stânga (dreapta) cu matricea (x_{kl}) care are $x_{ll} = 1$ pentru $l \neq i$, $x_{ii} = \alpha$, $x_{ij} = 1$ (respectiv $x_{ji} = 1$) şi restul elementelor nule;
• înmulţirea liniei (coloanei) i cu α revine la înmulţirea la stânga

(dreapta) cu matricea (x_{kl}) care are $x_{ll} = 1$ pentru $l \neq i$, $x_{ii} = \alpha$ şi restul elementelor nule.

Presupunând acum că avem

$$PAQ = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

luăm $B = QDP$ şi B este o pseudo-inversă. . . . . (**3 puncte**)

b) Dacă $A = 0_n$ atunci $B = 0_n$, iar dacă A este inversabilă atunci $B = A^{-1}$. . . . . (**2 puncte**)
Demonstrăm că în restul cazurilor A are mai multe pseudo-inverse (chiar o infinitate). Asemenea matrice se pot obţine înlocuind D, de exemplu, cu matricea

$$D_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & x \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

care coincide cu D, cu excepţia elementului aşezat pe poziţia $(1, n)$ şi care are o valoare arbitrară x. . . . . (**2 puncte**)

Subiectul 3. Se dau în plan sistemele de puncte $A_1, A_2, \dots, A_n$ şi $B_1, B_2, \dots, B_n$, având centre de greutate diferite. Demonstraţi că există un punct P astfel încât

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n = PB_1 + PB_2 + \dots + PB_n.$$

Soluţie. Considerăm un sistem de coordonate astfel încât cele două centre de greutate să aibe abscise diferite. Să presupunem că avem coordonatele $A_i(a_i, a'_i)$ şi $B(b_i, b'_i)$. Căutăm P pe Ox: $P(p, 0)$. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,. . . . . (**2 puncte**)

$$f(p) = PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n - (PB_1 + PB_2 + \dots + PB_n).$$

Avem

$$\begin{aligned} \lim_{p\to\infty} f(p) &= \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2p(b_k - a_k) + a_k^2 - b_k^2 + {a'_k}^2 - {b'_k}^2}{\sqrt{(p - a_k)^2 + {a'_k}^2} + \sqrt{(p - b_k)^2 + {b'_k}^2}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \end{aligned}$$

şi $\lim_{p\to-\infty} f(p) = -\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$. . . . . (**3 puncte**)
Pe de altă parte, funcţia f este continuă deci, folosind proprietatea valorilor intermediare, există p astfel încât $f(p) = 0$. . . . . . (**2 puncte**)

Observaţie. Condiţia referitoare la centrele de greutate este necesară pentru $n \geq 3$. Într-adevăr, dacă punctele $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sunt mijloacele segmentelor $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ...,$[A_nA_1]$, atunci punctul P nu există. În cazul $n = 2$, condiţia se poate elimina.

Subiectul 4. Se consideră o funcţie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, care are proprietatea: pentru orice $x > 0$, şirul $(f(nx))_{n\geq 0}$ este strict crescător.

a) Dacă funcţia este în plus continuă pe $[0, 1]$, rezultă că f este strict crescătoare?

b) Aceeaşi întrebare dacă funcţia este continuă pe $\mathbb{Q}_+$.

Soluţie. a) Nu, deoarece avem contraexemplul

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in [0,1] \cup \mathbb{Q}_+ \\ 2x & \text{dacă } x \in (1, \infty) \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \qquad \textbf{(3 puncte)}$$

b) În acest caz răspunsul este da.

Pentru aceasta vom folosi următoarea observaţie, care rezultă imediat din ipoteză: *dacă (r_n) este un şir strict monoton de numere raţionale şi x este un număr pozitiv atunci şirul $(f(r_nx))$ este strict monoton.*

Să presupunem acum prin reducere la absurd că există $x < y$ astfel încât $f(x) \geq f(y)$. Fie a un număr raţional din intervalul (x, y). Există atunci un şir strict crescător (q_n) şi un şir strict descrescător (r_n) de numere raţionale astfel încât $(q_nx) \to a$ şi $(r_ny) \to a$. Rezultă astfel

$$f(x) < \lim_{n\to\infty} f(q_nx) = f(a) = \lim_{n\to\infty} f(r_ny) < f(y),$$

contradicţie. . . . . **(4 puncte)**